

Soluciones de ecuaciones integrales de Volterra en espacios de variación Φ acotada

Existencia, unicidad y prolongación de soluciones

PROBLEMA

Las ecuaciones integrales tipo Volterra permiten modelar sistemas con memoria

$$x(t) = \alpha f(t) + (1 - \alpha) \int_0^t g(t, s, x(s)) ds$$

donde

- $x: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función desconocida
- $\alpha \in (0, 1)$
- $D = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq t + \infty\}$
- $g: D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

OBJETIVO GENERAL

Determinar la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones integrales de tipo Volterra en espacios de funciones de variación Φ -acotada, estableciendo condiciones sobre las funciones involucradas que garanticen la existencia de soluciones y analizando la posibilidad de extender dichas soluciones a intervalos más amplios.

PROPUESTA

Espacio

$$\Phi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$\Phi(t) = 0 \text{ si y sólo si } t = 0 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t) = +\infty$$

$$BV_\Phi(J) = \{f: J \rightarrow \mathbb{R} | V_\Phi(cf) < \infty, \quad c > 0\}$$

$$V_\Phi(f) := \sup_\xi \sum \Phi(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)$$

Condiciones

- C1) $f \in LV_\Phi([0, \infty))$
- C2) $g: D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es localmente Lipschitz

Operador integral tipo Volterra

$$V_g(x)(t) := \int_0^t g(t, s, x(s)) ds$$

RESULTADOS

✓ **Teorema 1.** Si g satisface la condición (C2) entonces el operador $V_g(x) \in BV_\Phi$ para todo $x \in BV_\Phi([0, a])$ ($a > 0$).

✓ **Teorema 2.** V_g es un operador acotado.

✓ **Teorema 3.** $x_n \in BV_\Phi([0, a])$ para todo $n \geq 0$ y $|x_n(t) - \alpha f(t)| \leq M_a^b t$ para todo $t \in [a, b]$

CONCLUSIONES

Existencia y unicidad: Se demuestra que las ecuaciones integrales de Volterra admiten una única solución (salvo igualdad en casi todo punto) en el espacio de funciones de Φ -variación acotada, bajo condiciones adecuadas de regularidad y acotación de f y g .

Preservación y acotación del operador: El operador de Volterra asociado preserva la Φ -variación acotada y resulta acotado en dicho espacio, lo que garantiza estabilidad operacional.

Aunque existen resultados clásicos en espacios de funciones de variación acotada, surge la necesidad de estudiar estas ecuaciones en espacios más generales de variación Φ -acotada, capaces de representar una mayor clase de comportamientos.

La ventaja principal es que estos espacios permiten trabajar con funciones menos regulares que las clásicas, pero conservando suficiente estructura para definir integrales y operadores.

Ecuación integral tipo Volterra

$$x(t) = \alpha f(t) + (1 - \alpha) \int_0^t g(t, s, x(s)) ds,$$

Existencia de soluciones

$$x_n(t) = \begin{cases} \alpha f(t) & \text{si } n = 0 \\ \alpha f(t) + (1 - \alpha) V_g(x_{n-1})(t) & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Prolongación de soluciones

Aplicaciones: Modelo de una comunidad aislada

✓ **Teorema 4.** Si f satisface la condición (C1) y g satisface la condición (C2), entonces $x(t) = \alpha f(t) + (1 - \alpha) \int_0^t g(t, s, x(s)) ds$, tiene solución en $BV_\Phi([0, \beta])$ donde $\beta = \min\left\{a, \frac{b}{M_a^b}\right\}$.
Adicionalmente, dos soluciones son iguales en casi todas partes.

Generalización de la teoría clásica: Nuestros resultados amplían la teoría tradicional de ecuaciones de Volterra al entorno de Φ -variación, ofreciendo un marco más flexible para problemas donde los espacios clásicos resultan insuficientes.

Este trabajo sugiere varias vías de investigación prometedoras:

1. Estudio del comportamiento asintótico de las soluciones.
2. Aplicaciones en modelos de dinámica de poblaciones y epidemiología.