

Estudio de ecuaciones integro-diferenciales con retardo infinito en el espacio de funciones localmente de variación acotada

PROBLEMA

Modelos con retardo infinito aparecen frecuentemente en ecología, química y otras ciencias aplicadas, donde el estado actual depende de todo el pasado del sistema. Un caso clásico es la ecuación integro-diferencial de Volterra con retardo infinito, utilizada para modelar la dinámica de poblaciones con tiempos de maduración.

OBJETIVO GENERAL

Establecer condiciones para la existencia y unicidad de soluciones en el espacio de funciones localmente de variación acotada, para dos ecuaciones fundamentales:

1. Ecuación de Volterra

$$x(t) = f(t) + \int_0^t g(t, s, x(s)) ds,$$

donde

$$f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \quad g: D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$D := \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq t < \infty\}$$

METODOLOGÍA

Notación:

Denotamos por $LBV(I)$ al espacio de funciones localmente de variación acotada sobre el intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Condiciones para la ecuación integral de Volterra:

(H) $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ pertenece a $LBV[0, +\infty)$

(H2) $g: D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es localmente Lipschitz.

Estrategia:

- Se utilizó el método de aproximaciones sucesivas de Picard, definiendo la sucesión :

$$\begin{cases} x_0(t) = f(t) \\ x_{n+1}(t) = f(t) + \int_0^t g(t, s, x_n(s)) ds, \quad n \geq 0 \end{cases}$$

- Se demostró la existencia de $\beta > 0$ tal que:
✓ Cada $x_n \in LBV[0, \beta]$

RESULTADOS

Teorema 1: Si f y g satisfacen las condiciones (H) y (H2), respectivamente, entonces la ecuación integro-diferencial de Volterra tiene una única solución definida sobre $[0, +\infty)$, la cual pertenece a $LBV[0, +\infty)$.

Teorema 2: Si K cumple la condición (H3), α y β la condición (H4) y ϕ la condición (H5), entonces la ecuación de Volterra con retardo infinito tiene una única solución definida sobre $[0, +\infty)$, la cual pertenece a $LBV[0, +\infty)$.

Estudiar estas ecuaciones permite entender mejor fenómenos con memoria larga y prever su comportamiento a largo plazo.

2. Ecuación integro-diferencial de Volterra con retardo infinito

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha(t) \int_{-\infty}^t k(t-s)x(s) ds - \rho(t)x^2(t), & t \geq 0 \\ x(t) = \phi(t) & t < 0 \end{cases}$$

Con

$$\alpha, \rho, K: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty) \quad \text{y} \quad \phi: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}.$$

- ✓ La sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a una función $x \in BV[0, \beta]$.

- Finalmente, se prolongó la solución x a $[0, +\infty)$ y se mostró que esta prolongación pertenece a $LBV[0, +\infty)$.

Condiciones para la ecuación con retardo infinito

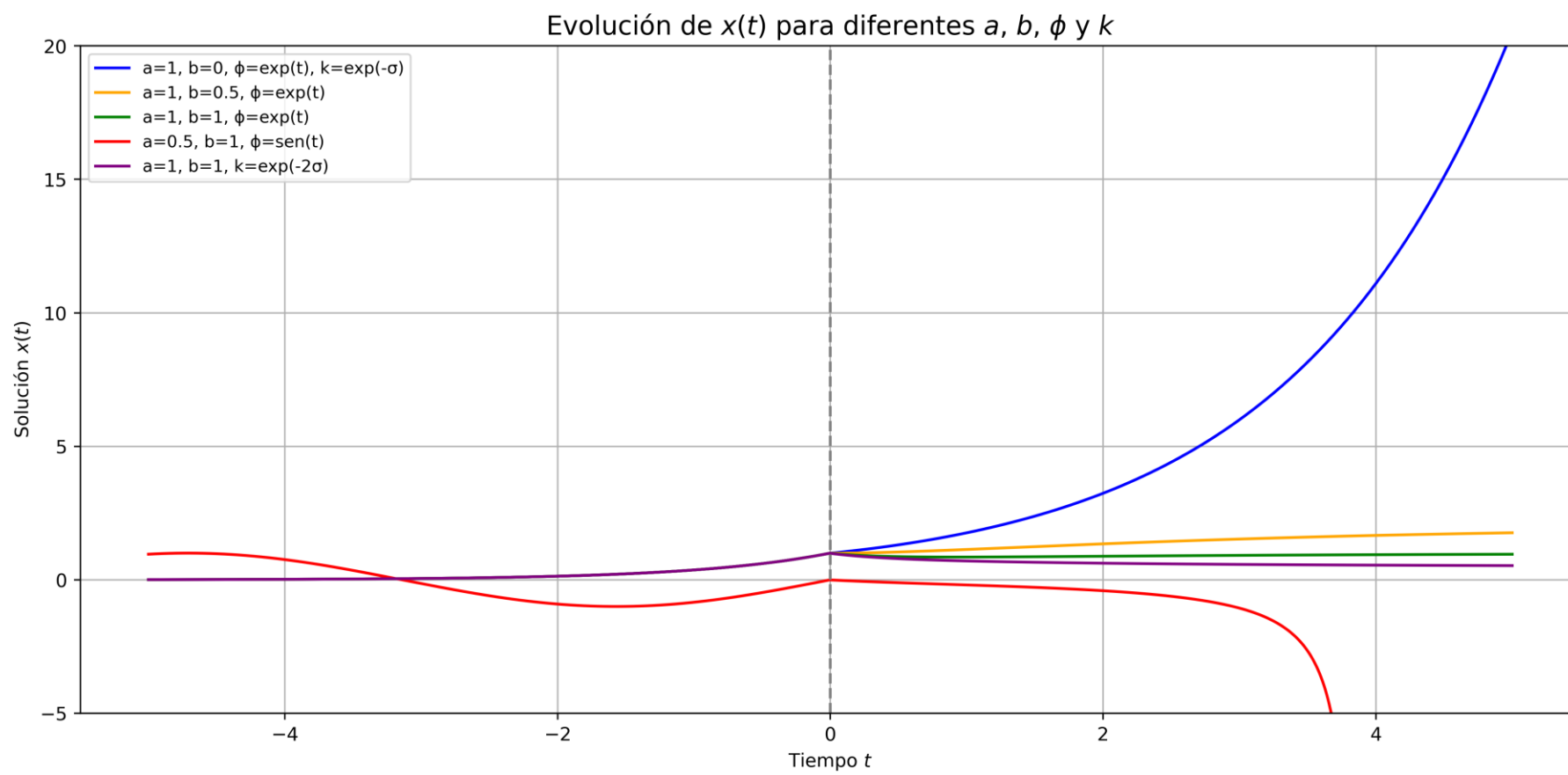
(H3) $K: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ es continua y $\int_0^{+\infty} K(s) ds = 1$

(H4) $\alpha, \rho: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ localmente Lipschitz

(H5) $\phi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ es continua, $\phi(0) > 0$ y $\phi(t) \geq 0$

Estrategia:

- Se reescribió la ecuación con retardo infinito como una ecuación integral de Volterra.
- Se verificó que las funciones involucradas satisfacen las hipótesis necesarias para aplicar el mismo tipo de análisis cualitativo a la ecuación con retardo infinito.



CONCLUSIONES

- Se establecieron condiciones para la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación de Volterra en el espacio $LBV[0, +\infty)$, utilizando el método de aproximaciones sucesivas de Picard.
- El análisis se extendió a un modelo con retardo infinito con coeficientes variables para una especie aislada.
- Las técnicas aplicadas pueden ser útiles en el estudio cualitativo de otros modelos con memoria infinita.